Projekt

Matematyka
branżowa szkoła II stopnia

1. Sprawność rachunkowa.

Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

2. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1) Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym jak i popularnonaukowym, oraz także w formie wykresów, diagramów, tabel.
   2) Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.

3. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
   2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.
   3) Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.
   4) Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.

4. Rozumowanie i argumentacja.
   1) Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
   2) Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
   3) Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.
   4) Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Uczeń:

1. wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
2. przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia, nie trudniejsze niż:
   1) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych;
   2) dowód własności: jeśli reszta z dzielenia dodatniej liczby całkowitej n przez 6 jest równa 1, to reszta z dzielenia liczby 2^n przez 7 jest równa 2;
3. stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
4. stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
5. stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje nierówności typu: $|x-2| < 3$, $|x+3| \geq 4$;
6. stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi;
7. stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

II. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
1. stosuje wzory skróconego mnożenia: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3, a^3-b^3, a^n-b^n;
2. rozkłada wielomiany na czynniki metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;
3. znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
4. dzieli z resztą wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x-a$;
5. dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

III. Równania i nierówności. Uczeń:
1. rozwiązuje równania, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
2. rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania;
3. rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania;

4. rozwiązuje równania i nierówności wymierne, w których z jednej strony znaku $(=, >, \geq, <, \leq)$ występuje iloraz $\frac{V(x)}{W(x)}$, a wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej, z drugiej strony znaku zaś znajduje się liczba 0.

IV. Układy równań. Uczeń:

1. rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
2. stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
3. rozwiązuje metodą podstawiana układy równań, z których jedno jest kwadratowe, a drugie liniowe, postaci $\begin{cases} ax+by=e \\ x^2+y^2+cx+dy=f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax+by=e \\ y=cx^2+dx+f. \end{cases}$

V. Funkcje. Uczeń:

1. odczytuje i interpretuje wartości funkcji, określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji;
2. wykorzystuje własności funkcji liniowej, kwadratowej i funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ do rozwiązywania zadań, również w zastosowaniach praktycznych;
3. na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x-a)$, $y=f(x)+b$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$;
4. posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

VI. Ciągi. Uczeń:

1. oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2. oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach

   1) $\begin{cases} a_1 = 0{,}001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n(1-a_n), \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \end{cases}$

3. sprawdza, czy ciąg jest rosnący czy malejący;
4. bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
5. stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
6. stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
7. wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

VII. Trygonometria. Uczeń:

1. wykorzystuje definicję sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$;
2. korzysta z wzorów $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
3. rozwiązuje trójkąty;
4. stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$.

VIII. Planimetria. Uczeń:

1. wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
2. rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (stosuje m.in. twierdzenie cosinusów);
3. stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
4. stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
5. przeprowadza dowody geometryczne.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:

1. rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań w postaci ogólnej, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
2. posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (przechodzenie przez dany punkt, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu itp.);
3. stosuje równanie okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
4. oblicza odległość punktu od prostej;
5. znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
6. wyznacza obrazy figur w translacji, symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej.

X. Stereometria. Uczeń:

1. rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
2. posługuje się pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
3. oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
4. wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

XI. Kombinatoryka. Uczeń:

1. zlicza obiekty stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
   1) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
   2) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1;
2. stosuje wzór włączeń i wyłączeń w obliczeniach kombinatorycznych dla dwóch i trzech zbiorów.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Uczeń:
1. oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
2. oblicza wartość oczekiwaną wysokości wygranej, w tym w sytuacjach praktycznych jak na przykład wysokość wygranej w prostych grach losowych i loteriach, oblicza średnią arytmetyczną i znajduje medianę;
3. posługuje się pojęciem centyla.

XIII. Rachunek różniczkowy. Uczeń:
1. oblicza pochodną funkcji wielomianowej;
2. stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji wielomianowej;
3. rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją wielomianową.

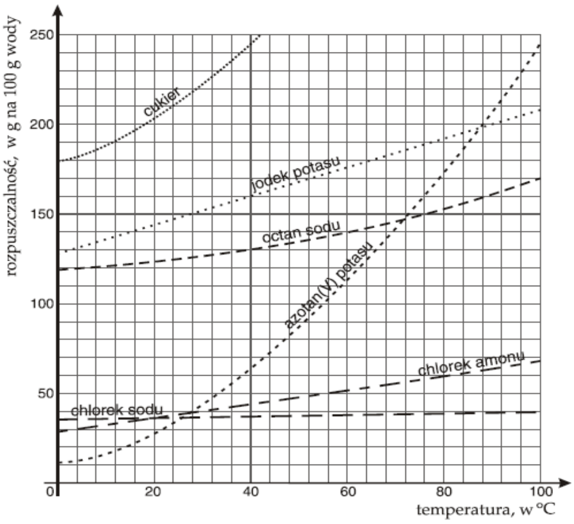
Warunki i sposób realizacji

Zastosowania logarytmów. Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych. W przyrodzie powszechne są procesy, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna, gdy w pewnym przedziale czasowym dana wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością. Przykładowe zadania ilustrujące zastosowanie logarytmu mogą być następujące:

1. Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4}$cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii.
2. Pacjent przyjął dawkę 60 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie t określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$. Po czterech godzinach organizm usuwa 40% leku. Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie pacjenta po upływie doby.

Złożenia funkcji. Oczekuje się od ucznia umiejętności operowania równocześnie danymi zaczerpniętymi z kilku źródeł. Jednym z przykładów zadań wymagających od ucznia de facto złożenia dwóch funkcji, jest zadanie, w którym podana jest zależność położenia danego obiektu od czasu i zależność wysokości od położenia, a należy znaleźć na jakiej wysokości znajdzie się ten obiekt o ustalonej godzinie; innym przykładem jest następujące zadanie.

Na wykresie[1] przedstawiono rozpuszczalność różnych substancji w wodzie. W jakiej temperaturze rozpuszczalność azotanu potasu w wodzie jest równa połowie rozpuszczalności cukru w temperaturze 20 stopni? O ile przyrasta rozpuszczalność chlorku amonu, a o ile octanu sodu przy zmianie temperatury od 20 do 60 stopni.



Rozwiązywanie równań i nierówności. W trakcie rozwiązywania równań i nierówności należy zwracać uwagę, że obok metody przekształceń równoważnych można stosować metodę wnioskowania (metoda analizy starożytnych). Wtedy każdy kolejny etap jest wnioskiem z poprzedniego. Po wyznaczeniu potencjalnego zbioru rozwiązań następuje sprawdzenie, które z wyznaczonych wartości istotnie są rozwiązaniami. W wielu sytuacjach nie warto domagać się przekształceń równoważnych, gdy metoda wnioskowania prowadzi do szybkich rezultatów. Na przykład nie ma potrzeby kontrolowania znaków wyrażeń podnoszonych do kwadratu, gdy prościej jest przekształcać wnioskując w jedną stronę i na końcu sprawdzić, czy otrzymane liczby są pierwiastkami równania wyjściowego.

Zastosowania algebry. Metody algebraiczne często dają się stosować w sytuacjach geometrycznych, a umiejętność pracy z wielomianami prowadzi do wielu prostych, choć nietypowych zastosowań. Na przykład rozwiązywanie układów równań z parametrem daje szanse na wykorzystanie geometrii. Można znajdować styczną do wykresu funkcji, jeśli jest on parabolą lub hiperbolą; w tych wypadkach styczna to prosta, która jest wykresem funkcji liniowej, która z parabolą lub hiperbolą ma dokładnie jeden punkt wspólny.

Innym przykładem jest wyznaczanie pierwiastków wymiernych wielomianów o współczynnikach całkowitych. Pytając o liczby całkowite x, dla których spełniona jest równość $x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0$, można zapisać ją w postaci $x^3 - x^2 - 41x = -105$ i zauważyć, że x musi dzielić liczbę 105.

[1] Wykres pochodzi z *Arkusza maturalnego A-1 XI/2006*

Ciągi. Ciągi należy omawiać tak, by uczniowie zdali sobie sprawę że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy uświadomić uczniom, że poza ciągami niemalejącymi i nierosnącymi istnieją też takie, które monotoniczne nie są. Warto zwrócić uwagę uczniów, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie. Przykładowo podany w punkcie VI,2.1) ciąg opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki (a_n jest częścią liczby osób, które o plotce słyszały, zaś współczynnik $\frac{1}{2}$ opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki). Podobny model może być użyty do rozprzestrzeniania się epidemii.

Stereometria. Wyobraźnia przestrzenna szczególnie rozwijana jest podczas realizacji treści nauczania ze stereometrii. Posługiwanie się modelami brył, a także umiejętność rysowania ich rzutów, znacznie ułatwi wyznaczanie różnych wielkości w bryłach. Wspomoże też tworzenie prawidłowego modelu rozwiązania zadania.

Rachunek prawdopodobieństwa. Uczniowie w przyszłości będą mieli do czynienia z zagadnieniami powiązanymi z losowością, które występują w różnych dziedzinach życia i nauki, na przykład: przy analizie sondaży, zagadnień z zakresu ekonomii i badaniach rynków finansowych lub w naukach przyrodniczych i społecznych. Dlatego przy okazji omawiania rachunku prawdopodobieństwa warto wspomnieć o paradoksach rachunku prawdopodobieństwa, które pokazują typowe błędy w rozumowaniu, i omówić niektóre z nich. Proste przykłady paradoksów znajdują się w podręcznikach, bardziej zaawansowane można często znaleźć w Internecie. Pokazanie paradoksów rachunku prawdopodobieństwa pozwoli wyrobić uczniom intuicję na temat potencjalnych pułapek w rozumowaniach oraz będzie przestrzegało przed stosowaniem pewnych błędnych uproszczeń w myśleniu. Warto też przeprowadzać z uczniami eksperymenty dotyczące rachunku prawdopodobieństwa. Można przykładowo wykonać doświadczenie, w którym uczniowie próbują napisać ręcznie długi losowy ciąg orłów i reszek albo go losują rzucając monetą. Błędne intuicje na temat losowości podpowiadają zwykle, że nie powinny tam występować długie sekwencje orłów (albo reszek) z rzędu, co pozwala na wykrycie którzy uczniowie autentycznie losowali swój ciąg, a którzy nie.

Pochodne. Posługiwanie się pojęciem granicy ilorazu różnicowego konieczne do zrozumienia pojęcia pochodnej wymaga dużych możliwości poznawczych. Dlatego też pochodne należy wprowadzać intuicyjnie, posługując się interpretacją fizyczną (prędkość chwilowa, natężenie prądu) oraz geometryczną (styczna, nachylenie wykresu).

Można się ograniczyć do podania wzoru na pochodną wielomianu i przejść do prostych zadań optymalizacyjnych wielomianów stopnia co najmniej trzeciego (do kwadratowych nie jest to potrzebne). Twierdzeniem, które ma pomóc w ich rozwiązywaniu jest twierdzenie mówiące, o tym, że funkcja o dodatniej pochodnej jest rosnąca. Jest to jedyne narzędzie w podstawie programowej, pozwalające na wyznaczanie największych lub najmniejszych wartości funkcji różniczkowalnej. Takie zadania, zwłaszcza jeśli mają bezpośrednie odniesienie do rzeczywistości, można traktować jako ukoronowanie procesu nauczania matematyki w szkole.

Dowody. Samodzielne przeprowadzanie dowodów przez uczniów jest niezwykle ważne. Rozwija ono bowiem takie umiejętności jak logiczne myślenie, precyzyjne wyrażanie myśli i zdolność rozwiązywania złożonych problemów. Przeprowadzanie dowodów ćwiczy konstruowanie poprawnych i przekonujących argumentów oraz rozumowań, które jest bardzo cenne w matematyce, ale też w wielu dziedzinach życia. Dlatego warto dokładać starań i kontynuować naukę wymagającej umiejętności dowodzenia, rozpoczętą pod koniec szkoły podstawowej.

Dobrym polem do ćwiczenia dowodzenia są dziedziny, w których uczniowie mają sporo intuicji. Tam mogą oni wykazać najwięcej inwencji twórczej przy dowodzeniu. Znakomitymi działami do przeprowadzania rozumowań są geometria i algebra (tu szczególnie teoria liczb z naciskiem na podzielność), a także proste zadania optymalizacyjne. Warto tu podkreślić znaczenie geometrii jako źródła wielu dobrych zadań.

Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia wśród uczniów jest omawianie dowodów twierdzeń, które uczeń poznaje. Jest to dobry sposób uświadamia uczniowi, że stosowane w matematyce twierdzenia nie biorą się znikąd i nawet, jeśli nie wszystkie podane na lekcjach twierdzenia są dowiedzione, to twierdzenie w matematyce musi zostać udowodnione, aby mogło być stosowane. Z drugiej strony dowody przedstawianych w szkole twierdzeń są znakomitym źródłem eleganckich rozumowań. Uczeń może traktować je jako wzorcowe i uczyć się na ich podstawie jak powinien wyglądać właściwie skonstruowany dowód. Poniżej znajduje się lista twierdzeń, których dowody uczeń powinien poznać w czasie nauki matematyki.

Twierdzenia:
1. Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.
2. Dowód niewymierności liczby $\log_2 5$.
3. Podstawowe własności logarytmów, łącznie ze wzorem na zamianę podstawy logarytmu.
4. Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x-a$ wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia:
   Dany jest wielomian $W(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ oraz liczba rzeczywista α. Wówczas istnieje wielomian $V(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$ oraz istnieje liczba rzeczywista r takie, że: $W(x)=(x-\alpha)V(x)+r$, przy czym jeśli: α jest całkowite i $a_0,\dots a_4$ są całkowite, to b_0 ,... b_3 i r też są całkowite.
5. Wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.
6. Twierdzenie o dwusiecznej:
   Jeśli prosta *CD* jest dwusieczną kąta *ACB* w trójkącie *ABC* i punkt *D* leży na boku *AB*, to $\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}$.

7. Wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ i twierdzenie sinusów jako wniosek z niego.

8. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.