Projekt

Matematyka
liceum ogólnokształcące i technikum

Cele kształcenia – wymagania ogólne

1. Sprawność rachunkowa.
   Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.
2. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1) Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.
   2) Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.
3. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
   2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.
   3) Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.
   4) Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.
4. Rozumowanie i argumentacja.
   1) Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
   2) Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
   3) Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.
   4) Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Uczeń:

1. wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
2. przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia, nie trudniejsze niż:
   1) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych;
   2) dowód własności: jeśli reszta z dzielenia dodatniej liczby całkowitej n przez 6 jest równa 1, to reszta z dzielenia liczby 2^n przez 7 jest równa 2;
3. stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
4. stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
5. stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x<y$ oraz $a>1$, to $a^x<a^y$, zaś gdy $x<y$ i $0<a<1$, to $a^x>a^y$;
6. stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje nierówności typu: $|x-2|<3$, $|x+3|\geq 4$;
7. wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
8. posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
9. stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi;
10. stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Rozszerzenie I. Uczeń:

1R. przeprowadza dowody indukcyjne (dla liczb naturalnych), nie trudniejsze niż:

1) uzasadnienie poprawności wzoru na liczbę przekątnych *n*-kąta wypukłego;

2) dowód podzielności przez 9 liczby $4^n+15n-1$, gdzie $n\geq 1$;

3) dowód równości $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ dla liczb naturalnych dodatnich.

II. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:

1. stosuje wzory skróconego mnożenia: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3, a^3-b^3, a^n-b^n;
2. usuwa pierwiastek z mianownika w wyrażeniach postaci: $\frac{a}{\sqrt{b}}$ i $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$;
3. dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
4. wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;

5. rozkłada wielomiany na czynniki metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;
6. znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
7. dzieli z resztą wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;
8. dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

Rozszerzenie II. Uczeń:

1R. znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;

2R. stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0} = 1$**,** $\binom{n}{1} = n$**,** $\binom{n}{n-1} = n$**,** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$**,** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$**;**

3R. korzysta ze wzorów na $(a+b)^n$ **i** $(a-b)^n$**.**

III. Równania i nierówności. Uczeń:

1. przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
2. interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
3. rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
4. rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
5. rozwiązuje równania, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
6. rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania;
7. rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania;
8. rozwiązuje równania i nierówności wymierne, w których z jednej strony znaku $(=, >, \geq, <, \leq)$ występuje iloraz $\frac{V(x)}{W(x)}$, a wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej, z drugiej strony znaku zaś znajduje się liczba 0.

Rozszerzenie III. Uczeń:

1R. rozwiązuje równania i nierówności wymierne, nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{2x}{(x-1)(x+1)};$$

2R. stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;

3R. rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym, niż: $2|x+3|+3|x-1|=13$, $|x+2|+2|x-3|<11$;

4R. analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami.

IV. Układy równań. Uczeń:

1. rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
2. stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
3. rozwiązuje metodą podstawiana układy równań, z których jedno jest kwadratowe, a drugie liniowe, postaci $\begin{cases} ax+by=e \\ x^2+y^2+cx+dy=f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax+by=e \\ y=cx^2+dx+f. \end{cases}$

Rozszerzenie IV. Uczeń:

1R. rozwiązuje układy równań kwadratowych postaci $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by=c \\ x^2+y^2+dx+ey=f. \end{cases}$

V. Funkcje. Uczeń:

1. określa funkcje za pomocą wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach), tabeli, wykresu, opisu słownego;
2. oblicza wartość w punkcie funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
3. odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
4. odczytuje i interpretuje wartości funkcji, określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji;
5. interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
6. wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o wykresie;
7. szkicuje wykres funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru;
8. interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

9. wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
10. wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
11. wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
12. na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x-a)$, $y = f(x)+b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
13. posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
14. posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Rozszerzenie V. Uczeń:

1R. na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;

2R. posługuje się złożeniami funkcji;

3R. dowodzi monotoniczności funkcji w prostych sytuacjach, również osadzonych w kontekście praktycznym.

VI. Ciągi. Uczeń:
1. oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2. oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:

1) $\begin{cases} a_1 = 0{,}001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} a_n (1 - a_n), \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \end{cases}$

3. sprawdza, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
4. bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
5. stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
6. stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
7. wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Rozszerzenie VI. Uczeń:

1R. dowodzi indukcyjnie poprawności wzoru na *n*-ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie, jak w przykładach:

1) **udowodnij, że wzór na *n*-ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie wzorami** $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 5 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \end{cases}$ **ma postać** $a_n = 2^n + 3^n$**;**
2) **udowodnij, że wzór na *n*-ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie wzorami** $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases}$ **ma postać** $a_n = n^2$**;**

2R. oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$**,** $\sqrt[n]{a}$ **oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów, a także twierdzenia o trzech ciągach;**

3R. rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

VII. Trygonometria. Uczeń:

1. wykorzystuje definicje sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$;
2. znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
3. znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
4. korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
5. rozwiązuje trójkąty;
6. stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

Rozszerzenie VII. Uczeń:

1R. stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;

2R. posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych;

3R. stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;

4R. korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

5R. rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$**,** $2\sin^2 x \le 1$**.**

VIII. Planimetria. Uczeń:

1. wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
2. rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów);

3. rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
4. korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
5. stosuje własności kątów wpisanych i środkowych opartych na równych łukach;
6. oblicza pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
7. stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
8. korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
9. wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
10. wykonuje konstrukcje okręgu opisanego na trójkącie i okręgu wpisanego w trójkąt;
11. stosuje własności trójkątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu;
12. wykonuje konstrukcje dwusiecznej, symetralnej, stycznej do okręgu przechodzącej przez zadany punkt i prostej równoległej do danej przechodzącej przez dany punkt;
13. stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
14. przeprowadza dowody geometryczne.

Rozszerzenie VIII. Uczeń:

1R. stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu;
2R. posługuje się związkami miarowymi między odcinkami stycznych i siecznych.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:

1. zaznacza w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych, odczytuje współrzędne danych punktów;
2. rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
3. posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (przechodzenie przez dany punkt, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu itp.);
4. oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
5. stosuje równanie okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
6. oblicza odległość punktu od prostej;
7. znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
8. wyznacza obrazy figur w translacji, symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej.

Rozszerzenie IX. Uczeń:

1R. stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;
2R. znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;
3R. dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

X. Stereometria. Uczeń:

1. rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
2. posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
3. oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
4. wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Rozszerzenie X. Uczeń:

1R. zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;

2R. wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

XI. Kombinatoryka. Uczeń:

1. zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
2. zlicza obiekty stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
   1) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
   2) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1;
3. stosuje wzór włączeń i wyłączeń w obliczeniach kombinatorycznych dla dwóch i trzech zbiorów.

Rozszerzenie XI. Uczeń:

1R. oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

2R. stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Uczeń:

1. oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
2. oblicza wartość oczekiwaną wysokości wygranej, w tym w sytuacjach praktycznych, jak na przykład wysokość wygranej w prostych grach losowych i loteriach, oblicza średnią arytmetyczną i znajduje medianę;
3. stosuje pojęcie centyla.

Rozszerzenie XII. Uczeń:

1R. oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje praktycznie twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;

2R. stosuje schemat Bernoulliego.

XIII. Rachunek różniczkowy. Uczeń:

1. oblicza pochodną funkcji wielomianowej;
2. stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji wielomianowej;
3. rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją wielomianową.

Rozszerzenie XIII.

1R. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

2R. stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;

3R. stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

4R. oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;

5R. stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;

6R. rozwiązuje zadania optymalizacyjne.

Warunki i sposób realizacji

Oznaczenia. Uczniowie powinni używać powszechnie przyjętego oznaczenia zbiorów liczbowych, a w szczególności: dla liczb całkowitych symbolu $\mathbb{Z}$, dla liczb wymiernych – $\mathbb{Q}$, dla liczb rzeczywistych – $\mathbb{R}$. Oznaczanie liczb całkowitych literą C może prowadzić do nieporozumień i należy go unikać.

Uczniowie powinni przyzwyczaić się do oznaczeń literowych i swobodnie stosować wzory, zarówno dla liter jak i dla liczb.

Przedziały. Uczeń powinien wykorzystywać przedziały do opisu zbioru rozwiązań nierówności. Warto podkreślić, że najważniejsza w odpowiedzi jest jej poprawność. Na przykład rozwiązanie nierówności $x^2-9x+20>0$ może być zapisane na każdy z poniższych sposobów:

– rozwiązaniem nierówności może być każda liczba x, która jest mniejsza od 4 lub większa od 5;

– rozwiązaniami są wszystkie liczby x mniejsze od 4 i wszystkie liczby x większe od 5;

– $x<4$ lub $x>5$;

– $x\in(-\infty,4)$ lub $x\in(5,\infty)$;

– $x\in(-\infty,4)\cup(5,\infty)$.

Każdy z powyższych zapisów jest poprawny, formalność zapisu nie stanowi o jego większej wartości. Nieraz zapis bez użycia symboli matematycznych nawet lepiej wykazuje zrozumienie przez uczniów kształconych treści.

Zastosowania logarytmów. Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych. W przyrodzie powszechne są procesy, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Dzieje się tak, gdy w pewnym przedziale czasowym dana wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością. Przykładowe zadania ilustrujące zastosowanie logarytmu mogą być następujące:

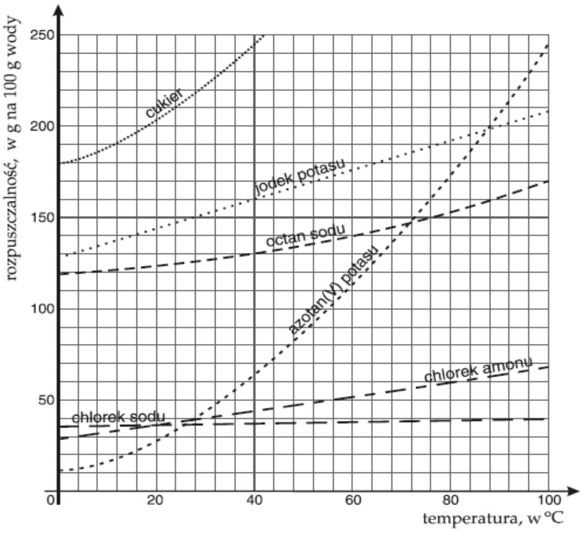
1. Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4} cm$ jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii.
2. Pacjent przyjął dawkę 60 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie t określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$. Po czterech godzinach organizm usuwa 40% leku. Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie pacjenta po upływie doby.

Postać kanoniczna. Przy okazji wielomianów kwadratowych podkreślać należy znaczenie postaci kanonicznej funkcji kwadratowej i wynikających z tej postaci własności. Należy zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli, są jedynie wnioskami z niej. Warto podkreślić, że wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z postaci kanonicznej, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

Złożenia funkcji i funkcje odwrotne. Jakkolwiek formalna definicja funkcji złożonej pojawia się dopiero na poziomie rozszerzonym, już na poziomie podstawowym oczekuje się od ucznia umiejętności operowania równocześnie danymi zaczerpniętymi z kilku źródeł. Z formalnego punktu widzenia, proces, który uczeń wykonuje przy rozwiązywaniu takich zadań, to jest składanie funkcji, bądź znajdowanie funkcji odwrotnej, nie wymaga wprowadzenia na poziomie podstawowym operacji złożenia czy odwracania. Jednym z przykładów zadań wymagających od ucznia de facto złożenia dwóch funkcji, jest zadanie, w którym podana jest zależność położenia danego obiektu od czasu i zależność wysokości od położenia, a należy znaleźć na jakiej wysokości znajdzie się ten obiekt o ustalonej godzinie; innym przykładem jest następujące zadanie.

Na wykresie[1] przedstawiono rozpuszczalność różnych substancji w wodzie. W jakiej temperaturze rozpuszczalność azotanu potasu w wodzie jest równa połowie rozpuszczalności cukru w temperaturze 20 stopni? O ile przyrasta rozpuszczalność chlorku amonu, a o ile octanu sodu przy zmianie temperatury od 20 do 60 stopni.

[1] Wykres pochodzi z *Arkusza maturalnego A-1 XI/2006*



Pojęcie funkcji odwrotnej nie pojawia się w podstawie programowej nawet w rozszerzeniu, niemniej przy pracy ze zdolnym uczniem można poruszyć związki monotoniczności funkcji z jej odwracalnością, a także wyprowadzić wzór na pochodną funkcji odwrotnej ze wzoru na pochodną złożenia.

Rozwiązywanie równań i nierówności. W trakcie rozwiązywania równań i nierówności należy zwracać uwagę, że obok metody przekształceń równoważnych można stosować metodę wnioskowania (metoda analizy starożytnych). Wtedy każdy kolejny etap jest wnioskiem z poprzedniego. Po wyznaczeniu potencjalnego zbioru rozwiązań następuje sprawdzenie, które z wyznaczonych wartości istotnie są rozwiązaniami. W wielu sytuacjach nie warto domagać się przekształceń równoważnych, gdy metoda wnioskowania prowadzi do szybkich rezultatów. Na przykład nie ma potrzeby kontrolowania znaków wyrażeń podnoszonych do kwadratu, gdy prościej jest przekształcać wnioskując w jedną stronę i na końcu sprawdzić, czy otrzymane liczby są pierwiastkami równania wyjściowego.

Zastosowania algebry. Metody algebraiczne często dają się stosować w sytuacjach geometrycznych, a umiejętność pracy z wielomianami prowadzi do wielu prostych, choć nietypowych zastosowań. Na przykład rozwiązywanie układów równań z parametrem daje szanse na wykorzystanie geometrii. Można znajdować styczną do wykresu funkcji, jeśli jest on parabolą lub hiperbolą; w tych wypadkach styczna to prosta, która jest wykresem funkcji liniowej, która z parabolą lub hiperbolą ma dokładnie jeden punkt wspólny. Innym przykładem jest wyznaczanie pierwiastków wymiernych wielomianów o współczynnikach całkowitych. Pytając o liczby całkowite x, dla których spełniona jest równość $x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0$, można zapisać ją w postaci $x^3 - x^2 - 41x = -105$ i zauważyć, że x musi dzielić liczbę 105.

Ciągi. Ciągi należy omawiać tak, by uczniowie zdali sobie sprawę że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy uświadomić uczniom, że poza ciągami niemalejącymi i nierosnącymi istnieją też takie, które monotoniczne nie są. Warto zwrócić uwagę uczniów, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie. Przykładowo podany w punkcie VI,2.1) ciąg opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki (a_n jest częścią liczby osób, które o plotce słyszały, zaś współczynnik $\frac{1}{2}$ opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki). Podobny model może być użyty do rozprzestrzeniania się epidemii.

Granica ciągu. Definicja granicy ciągu jest trudna. Aby ułatwić uczniom jej zrozumienie warto poprzedzić ją przykładami. Służyć temu mogą eksperymenty numeryczne przy użyciu komputerów lub innego sprzętu elektronicznego. Przykładowo, warto obliczyć kilkadziesiąt początkowych wyrazów ciągów $a_n = b^{\frac{1}{n}}$, $b_n = 0{,}99^n$, $c_n = 1{,}01^n$ i zaobserwować ich zachowanie. Dla coraz większych n wyrazy a_n zbliżają się do 1, wyrazy b_n do 0, a wyrazy c_n stają się dowolnie duże. Ta obserwacja pomaga w zrozumieniu pojęcia granicy ciągu. Jednocześnie uczniowie powinni zrozumieć ograniczenia tej metody. Po pierwsze zrozumienie jak zachowują się początkowe wyrazy ciągu pozwala jedynie na sformułowanie hipotezy na temat zachowania się całego ciągu, którą należy oddzielnie uzasadnić. Po drugie często rozważenie pierwszych trzech, czterech wyrazów ciągu to zdecydowanie za mało, by formułować odpowiedzialnie hipotezy, czasem należy wyznaczyć dziesięć, dwadzieścia, albo nawet więcej wyrazów, by dostrzec odpowiednie prawidłowości. Jako wstęp do definicji granicy warto również zadawać uczniom pytania w rodzaju: czy istnieje taka liczba naturalna k, że dla każdej liczby naturalnej $n > k$ zachodzi nierówność $\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{3}$ albo $n^{\frac{1}{n}} < 1{,}01$. Arytmetyczne własności granicy są w zasadzie łatwe, ale już nie w przypadku symboli nieoznaczonych. Uczniowie powinni podawać przykłady ciągów zbieżnych do zera, których ilorazy mają różne granice, skończone lub nie, oraz takich, których iloraz nie ma granicy. Wprowadzone w podstawie programowej w zakresie rozszerzonym twierdzenie o trzech ciągach bardzo dobrze wspiera budowanie intuicji granicy ciągu.

Trójkąty. Rozwiązywanie trójkątów to – zgodnie z tradycją – znajdowanie wszystkich kątów i boków na podstawie danych np. dwa boki i kąt między nimi zawarty albo trzy boki. Uczniowie powinni umieć wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30, 45, 60 stopni rozpatrując trójkąt prostokątny równoramienny lub trójkąt równoboczny.

Stereometria. Wyobraźnia przestrzenna szczególnie rozwijana jest podczas realizacji treści nauczania ze stereometrii. Posługiwanie się modelami brył, a także umiejętność rysowania ich rzutów, znacznie ułatwi wyznaczanie różnych wielkości w bryłach. Analiza przekrojów czworościanu i sześcianu może być bardzo pouczająca; szczególnie wartościowa jest odpowiedź na pytanie: czym może być przekrój. Doświadczenie uczy, że na przykład kwestia istnienia przekroju sześcianu, który jest trapezem, ale nierównoramiennym, może sprawiać kłopoty wielu uczniom.

Dwumian Newtona. Ważne jest, żeby przy okazji nauczania wzoru na $(a+b)^n$ podkreślić znaczenie współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona) $\binom{n}{k}$ w kombinatoryce. Warto go również zapisywać w postaci $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}$, gdyż w tej formie jest bardziej widoczna jego interpretacja i łatwiej go obliczyć dla małych k.

Rachunek prawdopodobieństwa. Uczniowie w przyszłości będą mieli do czynienia z zagadnieniami powiązanymi z losowością, które występują w różnych dziedzinach życia i nauki, na przykład: przy analizie sondaży, zagadnień z zakresu ekonomii i badaniach rynków finansowych lub w naukach przyrodniczych i społecznych. Dlatego przy okazji omawiania rachunku prawdopodobieństwa warto wspomnieć o paradoksach rachunku prawdopodobieństwa, które pokazują typowe błędy w rozumowaniu, i omówić niektóre z nich. Proste przykłady paradoksów znajdują się w podręcznikach, bardziej zaawansowane można często znaleźć w Internecie. Pokazanie paradoksów rachunku prawdopodobieństwa pozwoli wyrobić uczniom intuicję na temat potencjalnych pułapek w rozumowaniach oraz będzie przestrzegało przed stosowaniem pewnych błędnych uproszczeń w myśleniu. Warto też przeprowadzać z uczniami eksperymenty dotyczące rachunku prawdopodobieństwa. Można przykładowo wykonać doświadczenie, w którym uczniowie próbują napisać ręcznie długi losowy ciąg orłów i reszek albo go losują rzucając monetą. Błędne intuicje na temat losowości podpowiadają zwykle, że nie powinny tam występować długie sekwencje orłów (albo reszek) z rzędu, co pozwala na wykrycie którzy uczniowie autentycznie losowali swój ciąg, a którzy nie.
Ważne jest uświadomienie uczniom, że rachunek prawdopodobieństwa nie ogranicza się jedynie do schematu klasycznego i używanej tam kombinatoryki. Dobrą ilustracją są tu przykłady używające schematu Bernoulliego dla dużej liczby prób. Przykładowo można zbadać jakie jest prawdopodobieństwo, aby w ciągu 10, 100 czy 1000 rzutów monetą wypadła dokładnie połowa orłów i obliczyć wartość liczbową wyniku $\binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ (dla n równego odpowiednio 5, 50 i 500 daje wyniki około 0,246, 0,080 i 0,025; przy bardzo dużym n dobrze przybliża się przez $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, ale tego uczniowie nie muszą wiedzieć).

Pochodne. Posługiwanie się pojęciem granicy ilorazu różnicowego konieczne do zrozumienia pojęcia pochodnej wymaga dużych możliwości poznawczych. Dlatego też pochodne należy wprowadzać w pierwszej kolejności intuicyjnie, posługując się interpretacją fizyczną (prędkość chwilowa, natężenie prądu) oraz geometryczną (styczna, nachylenie wykresu).

Realizując zakres podstawowy matematyki, można się ograniczyć do podania wzoru na pochodną wielomianu i przejść do prostych zadań optymalizacyjnych wielomianów stopnia co najmniej trzeciego (do kwadratowych nie jest to potrzebne). Twierdzeniem, które ma pomóc w rozwiązywaniu zadań optymalizacyjnych, jest twierdzenie mówiące o tym, że funkcja o dodatniej pochodnej jest rosnąca. Jest to jedyne zalecane narzędzie w podstawie programowej, pozwalające na wyznaczanie największych lub najmniejszych wartości funkcji. Takie zadania, zwłaszcza jeśli mają bezpośrednie odniesienie do rzeczywistości, można traktować jako ukoronowanie procesu nauczania matematyki w tym zakresie.
Dopiero w zakresie rozszerzonym należy podać definicję pochodnej. Podstawowym zastosowaniem tej definicji może być wyprowadzenie wzoru na pochodną wielomianu i pochodną sumy, iloczynu i, ewentualnie, złożenia funkcji.

Dowody. Samodzielne przeprowadzanie dowodów przez uczniów jest niezwykle ważne. Rozwija ono bowiem takie umiejętności jak: logiczne myślenie, precyzyjne wyrażanie myśli i zdolność rozwiązywania złożonych problemów. Przeprowadzanie dowodów ćwiczy konstruowanie poprawnych, przekonujących argumentów i rozumowań, które jest bardzo cenne w matematyce, ale też w wielu dziedzinach życia. Dlatego warto dokładać starań i kontynuować nauczanie wymagającej umiejętności dowodzenia, rozpoczęte pod koniec szkoły podstawowej.

Dobrą okazją do ćwiczenia dowodzenia są dziedziny, w których uczniowie mają sporo intuicji. Tam mogą oni wykazać najwięcej inwencji twórczej przy dowodzeniu. Znakomitymi działami do przeprowadzania rozumowań są geometria i algebra (tu szczególnie teoria liczb z naciskiem na podzielność), a także proste zadania optymalizacyjne. Warto tu podkreślić znaczenie geometrii jako źródła wielu dobrych zadań. Na poziomie rozszerzonym wachlarz możliwych dowodów zostaje wzbogacony o podstawowe zastosowania indukcji matematycznej.

Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia wśród uczniów jest omawianie dowodów twierdzeń, które uczeń poznaje. Jest to dobry sposób uświadamia uczniowi, że stosowane w matematyce twierdzenia nie biorą się znikąd i nawet, jeśli nie wszystkie podane na lekcjach twierdzenia są dowiedzione, to twierdzenie w matematyce musi zostać udowodnione, aby mogło być stosowane. Z drugiej strony dowody przedstawianych w szkole twierdzeń są znakomitym źródłem wzorcowych rozumowań. Uczeń może uczyć się na ich podstawie jak powinien wyglądać właściwie skonstruowany dowód. Poniżej znajduje się lista twierdzeń, których dowody uczeń powinien poznać w czasie nauki matematyki.

Twierdzenia – zakres podstawowy:

1. Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.
2. Dowód niewymierności liczb: $\sqrt{2}$, $\log_2 5$ lub podobnych.
3. Wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego, współrzędne wierzchołka paraboli.
4. Podstawowe własności potęg (o wykładnikach całkowitych i wymiernych) i logarytmów, łącznie ze wzorem na zamianę podstawy logarytmu.
5. Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x-a$ wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia: Dany jest wielomian $W(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ oraz liczba rzeczywista α. Wówczas istnieje wielomian $V(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$ oraz istnieje liczba rzeczywista r takie, że: $W(x)=(x-\alpha)V(x)+r$, przy czym jeśli: α jest całkowite i $a_0,\dots a_4$ są całkowite, to b_0 ,... b_3 i r też są całkowite.
6. Wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.
7. Twierdzenie o kątach w okręgu:
   a) Kąty środkowe są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach.

b) Kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym:
Jeśli odcinek *CD* jest wysokością trójkąta prostokątnego *ABC* o kącie prostym *ACB*, to $|AD|\cdot|BD|=|CD|^2$, $|AC|^2=|AB|\cdot|AD|$ oraz $|BC|^2=|AB|\cdot|BD|$.

9. Twierdzenie o dwusiecznej:
Jeśli prosta *CD* jest dwusieczną kąta *ACB* w trójkącie *ABC* i punkt *D* leży na boku *AB*, to $\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}$.

10. Wzór na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ i twierdzenie sinusów jako wniosek z niego.

11. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenia – zakres rozszerzony:

1. Dowód kombinatoryczny tożsamości: jeśli $0<k<n$, to $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

2. Wzór dwumianowy Newtona. Wzory skróconego mnożenia na $a^n \pm b^n$ (przy odpowiednich założeniach o *n*) oraz jako wniosek: dla liczb całkowitych a i b, $a-b \mid a^n-b^n$.

3. Wzory Viète'a.

4. Wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.

5. Twierdzenia o istnieniu niektórych punktów szczególnych trójkąta:

a) Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie i jako wniosek z niego – proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
b) Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

6. Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg:
Czworokąt wypukły *ABCD* można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|\angle BAD|+|\angle BCD|=|\angle ABC|+|\angle ADC|=180^\circ$.

7. Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu:
W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB|+|CD|=|AD|+|BC|$.

8. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i twierdzenie o trzech prostopadłych jako wniosek z niego:
a) Dane są proste *k*, *l* i *m* leżące na jednej płaszczyźnie. Jeśli proste *k* i *l* przecinają się i prosta *n* jest do nich prostopadła, to prosta *n* jest także prostopadła do prostej *m*.
b) Prosta *k* przecina płaszczyznę *P* i nie jest do niej prostopadła. Prosta *l* jest rzutem prostokątnym prostej *k* na płaszczyznę *P*. Prosta *m* leży na płaszczyźnie *P*. Wówczas proste *k* i *m* są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy proste *l* i *m* są prostopadłe.